

基于子空间的空时分组码的解码

赵 铮,殷勤业,吴晓军
(西安交通大学电信学院,陕西西安 710049)

摘 要: 空时码解码算法往往假设信道状态信息(CSI)已经事先估计出,信道估计需要额外的运算量,而且信道估计误差使解码性能降低.本文提出一种基于子空间方法的空时分组码直接解码算法,利用空时分组码的结构,结合子空间算法,可以不需要信道信息,直接得到码符信息的闭式解.仿真实验结果表明,随着噪声子空间求解准确度的提高,直接解码算法性能逐渐接近使用确切信道信息的相关解码器.

关键词: 空时分组码;子空间方法;解码

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 02-0203-04

Subspace-Based Decoding of Space-Time Block Code

ZHAO Zheng, YIN Qin-ye, WU Xiao-jun

(School of Electronics and Information Engineering Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shanxi 710049, China)

Abstract: In recent work on decoding space-time codes, it is assumed that a channel estimate is obtained. To estimate the channel increases the computation load and a loss in performance of decoding is incurred by the error of channel estimate. In this paper, we propose a new decoding algorithm for space-time block coding. Combined with the structure of space-time block coding, the subspace of the transmitted signal are exploited to carry out the decoding without knowledge of the channel. Simulation results show that with the increase of the precision of noise subspace, the performance of our decoding algorithm approaches that of the coherent decoding algorithm with knowledge of channel.

Key words: space-time block code; subspace method; decoding

1 引言

随着移动用户数目的急剧增加及宽带业务的引入,人们对移动通信容量的需求与日俱增,频率资源匮乏的问题更加突出,追求尽可能高的频谱利用率的要求日益迫切.近年来提出的空时码是提高无线频谱利用率的有效方案之一^[1].它使用多个发射和接收天线,利用不同天线发射信息的冗余,使得在接收端可以进行分集接收,与不使用空时码的系统相比,空时码可以在不牺牲带宽的情况下获得更高的编码增益,提高了频谱利用率,从而提高系统的容量.为了克服空时码解码过于复杂的缺陷,Alamouti于1998年提出了使用两个天线发射的空时分组码^[2],后来这一方法被推广到任意个天线的情况^[3].本文针对空时分组码提出一种解码算法.

在对空时码解码时,常常要先估计出信道状态信息(CSI),然后利用这些信道信息进行解码.估计信道需要额外的运算量,而且信道估计存在误差,降低解码性能,另外信道估计所需要的导频信号占用频带资源.目前,不利用信道信息直接进行解码的空时码分为两类:差分算法^[4]和非差分算法^[5].差分算法需要利用以往的数据,因此假设信道是非时变的.而非差分空时码解码复杂度为指数级的^[5].

本文提出一种基于子空间方法的空时分组码的解码算法.它不需要信道信息,通过子空间算法,直接从过采样的接收信号中得到码符信息的闭式解.子空间方法已经被越来越多地应用到通信系统当中.在对空时码进行解码时,单纯利用子空间方法,我们无法从接收信号中解得码符信息.但是,空时分组码具有特殊的正交设计,正因为此,同其他的空时编码相比,它解码简单.利用这一特性,结合子空间方法,我们不仅可以得到码符信息的闭式解,而且使得码符信息的求解变得简单.同要利用过去数据信息的差分类解码算法相比,本算法直接得到一段码符信息的闭式解,这使得它更适合于象移动通信系统这样的动态系统.本算法的运算量主要集中在奇异值分解上(SVD)上,其复杂度为 $O(N^3)$.仿真实验结果表明,随着噪声子空间求解准确度的提高,直接解码算法的性能逐渐接近使用确切信道信息的相关解码器.

在本文中, $[\otimes]^*$ 表示求共轭, $[\otimes]^T$ 表示转置, $[\otimes]^H$ 表示共轭转置.

2 系统模型

2.1 空时分组码

这里的空时分组码系统具有两个发射天线和一个接收天

线,采用 1/2 速率空时分组编码,如图 1 所示.在空时分组码中,所谓 1/2 速率是指经过编码后,一个码符由两个码元表示,在 $2p$ 个码元周期发射 p 个码符的内容.首先,对输入码符进行分组,每一组有两个码符.如果 $\{c_1, c_2\}$ 为一组中的两个码符,经过空时分组编码后,在第 $n, n+1, n+2, n+3$ 个码元周期(也有文献称之为时隙),从天线 1 发射的信号为 $c_1, c_1, -c_2^*, c_2^*$ 从天线 2 发射的信号为 $c_2, -c_2, c_1^*, c_1^*$.那么,空时分组码矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & -c_2 \\ -c_2^* & c_1^* \\ c_2^* & c_2^* \end{bmatrix} \quad (1)$$

如果令 $d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $d_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 那么 $C = \begin{bmatrix} c_1 d_1 & c_2 d_2 \\ - (c_2 d_2)^* & (c_1 d_1)^* \end{bmatrix}$. 这就是 1/2 速率空时分组码的一种.实际上, d_1, d_2 在时域引入了冗余.在不知道信道信息的情况下,使得解码的结果唯一.从第 3 节讨论的解码过程中,我们将会看到 d_1, d_2 的作用.

2.2 信道模型

目前,对于空时码的研究主要集中在平衰落信道上,没有考虑码间串扰的影响,本文考虑了这种影响.我们假设码间串扰只存在于两个相邻码元之间,并且码间串扰的时延扩展远小于码元周期 T ,根据文[6],可以只在一个码元周期中,无码间串扰的一段进行采样,对这一段信号进行处理.在实际系统中,有些研究便是采用这样信道模型,如不采用循环前缀的 OFDM 系统^[7],以及 CDMA 系统^[8].

图 2 给出了这一类信道模型的示意图. $h(t)$ 为信道特征波形, T 为码元周期, $h(t)$ 持续的时间略大于一个码元周期.图 2(b) 为码元 $\{1, -1, 1\}$ 经过信道后,接收到的信号波形. $\tilde{r}(t)$ 对应一个码元周期中无码间串扰的一段,采样时便是对这一段信号进行采样.相应的信道特征波形从 $h(t)$ 变为 $\tilde{h}(t)$,如图 2 所示.信号经过信道后,如果不考虑噪声,图 2 中的 $\tilde{r}(t)$ 可以表示为 $\tilde{r}(nT+t) = \tilde{h}(t) c(n)$.

对于空时码系统,令 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ 分别表示从第一和第二根发射天线到接收天线的信道特征波形.对接收信号每一个码元周期中没有码间串扰的部分 $\tilde{r}(t)$ 进行采样,相应的信道特征波形从 $h_i(t)$ 变为 $\tilde{h}_i(t)$, ($i=1,2$), 则 $\tilde{r}(t)$ 可以表示为

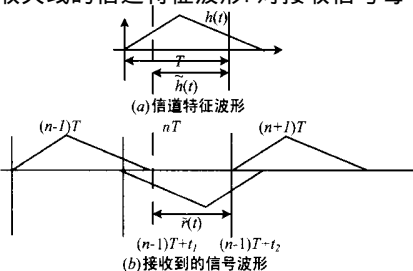


图 2 信道模型

$$\begin{bmatrix} \tilde{r}[nT+t] \\ \tilde{r}[(n+1)T+t] \\ \tilde{r}[(n+2)T+t] \\ \tilde{r}[(n+3)T+t] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1(t) c_1 d_1 + \tilde{h}_2(t) c_2 d_2 \\ -\tilde{h}_1(t) c_2^* d_2 + \tilde{h}_2(t) c_1^* d_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

以采样间隔 T_c 对 $\tilde{r}(t)$ 进行过采样,即对码元周期中无码间串扰的部分进行采样,采样 m 点,令

$$\tilde{r}(n) = [\tilde{r}(nT+T_c), \tilde{r}(nT+2T_c), \dots, \tilde{r}(nT+mT_c)]$$

$$\tilde{h}_k = [\tilde{h}_k(T_c), \tilde{h}_k(2T_c), \dots, \tilde{h}_k(mT_c)]$$

式(2)可以表示为

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{r}(n) \\ \tilde{r}(n+1) \\ \tilde{r}(n+2) \\ \tilde{r}(n+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 d_1 & c_2 d_2 \\ - (c_2 d_2)^* & (c_1 d_1)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

如果考虑加性噪声,式(3)进一步表示为

$$R = C \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

3 基于子空间方法的解码算法

3.1 求得信号的噪声子空间

对 R 进行奇异值分解(SVD),我们得到

$$R = [U_s \quad U_0] \begin{bmatrix} s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s^H \\ V_0^H \end{bmatrix} \quad (5)$$

由子空间的理论^[9],可知由 U_0^* 列向量张成的空间和由 C^T 行向量张成的空间正交,即 $C^T U_0^* = 0$. U_0 被称为噪声子空间.根据子空间的理论,可以知道 U_0^* 是一个 4×2 矩阵,表示为分块矩阵的形式

$$U_0^* = \begin{bmatrix} (u_0^*)_{11} & (u_0^*)_{12} \\ (u_0^*)_{21} & (u_0^*)_{22} \\ (u_0^*)_{31} & (u_0^*)_{32} \\ (u_0^*)_{41} & (u_0^*)_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中 $(u_0^*)_{ij}$ 表示第 i 行 j 列的元素, $u_{ij} = \begin{bmatrix} (u_0^*)_{2i-1,j} \\ (u_0^*)_{2i,j} \end{bmatrix}$, 为一个具有两个元素的列向量.所以, $C^T U_0^* = 0$ 可以表示为

$$\begin{bmatrix} c_1 d_1 & c_2 d_2 \\ - (c_2 d_2)^* & (c_1 d_1)^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

由于 C 为一个矩阵,从式(7)中无法直接解得 C ,只可能得到 U_0^* 正交补空间的基底.但是,空时分组码具有一些特殊的性质,利用这些性质,进行以下变换,我们不仅可以直接得到码符信息的闭式解,而且使 C 的求解变得简单.

3.2 基于噪声子空间的空时分组码的解码

令 C 表示任意空时分组码矩阵,包含了 k 个码符 $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ 的信息,空时分组码具有如下性质:设有一向量 h ,使得 $Ch=0$,那么可以由 h 的元素构成一个满秩的矩阵 H ,满足 $HC=0$,其中向量 c 的每一个元素由集合 $\{\pm c_1, \pm c_1^*, \dots, \pm c_k, \pm c_k^*\}$ 中的元素构成.利用这一性质,对式(7)进行变换,对矩阵 C 求解的问题转变为对码符信息构成的向量 c 进行求解.

式(7)可以表示为 C^T 与 U_0^* 的各列分别相乘的形式,

$$C^T \begin{bmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 d_1^T & - (c_2)^* d_2^T \\ c_2 d_2^T & (c_1)^* d_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \end{bmatrix} = 0, (i=1,2) \quad (8)$$

式(8)中 C^T 为一个空时分组码矩阵,利用空时分组码性质,式(8)可以变为如下形式,

$$\begin{bmatrix} u_{1,i}^T & u_{2,i}^T \\ (u_{2,i}^T)^* & - (u_{1,i}^T)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 d_1 \\ - (c_2)^* d_2 \end{bmatrix} = 0, (i=1,2) \quad (9)$$

其证明见附录的定理 1,其中 $i=1$ 和 $i=2$ 对应了 U_0^* 的两列,将 $i=1$ 和 $i=2$ 时,式(9)的内容合并,得

$$\begin{bmatrix} c_1 d_1 \\ - (c_2)^* d_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

其中

$$= \begin{bmatrix} u_{11}^T & u_{21}^T \\ (u_{21}^T)^* & - (u_{11}^T)^* \\ u_{12}^T & u_{22}^T \\ (u_{22}^T)^* & - (u_{12}^T)^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

是一个 4×4 的矩阵,如果 的秩为 3,从式(10)可知, $k[c_1 d_1^T, - c_2^* d_2^T]^T$ 是 $\mathbf{x} \mathbf{x} = 0$ 所有的解,其中 k 为任意复系数,利用通信中的有限码集特性可以将其去除.但是,可以证明 $k_1[c_1 d_1^T, - c_2^* d_2^T]^T$ 和 $k_2[c_2 d_2^T, c_1^* d_1^T]^T$ 都为 $\mathbf{x} \mathbf{x} = 0$ 的解(证明见附录的定理 2),这样,从 $\mathbf{x} \mathbf{x} = 0$ 的解中无法得到 $\{c_1, c_2\}$.

然而,利用 d_1, d_2 可以区分 $\mathbf{x} \mathbf{x} = 0$ 的这两个解,得到 $\{c_1, c_2\}$ 的唯一解.对式(10)进一步变换,令

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & d_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

则 $[c_1 d_1^T, - (c_2)^* d_2^T]^T$ 可以表示为

$$\begin{bmatrix} c_1 d_1 \\ - c_2^* d_2 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} c_1 \\ - c_2^* \end{bmatrix} \quad (13)$$

所以,式(10)可以表示为

$$\mathbf{x} D \mathbf{x} \begin{bmatrix} c_1 \\ - c_2^* \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

可以证明, $k[c_1, - c_2^*]^T$ 为 $\mathbf{x} D \mathbf{x} = 0$ 的所有解(其证明见附录的定理 3),其中 k 为任意复系数,利用有限码集特性去除 k ,得到 $[c_1, - c_2^*]^T$ 的解.在实际中,不可能得到理想的噪声子空间,式(14)为一个超定方程.利用最小二乘算法,我们可以解得 $[c_1, - c_2^*]^T$.

4 仿真实验

相关解码器是空时分组码经典的解码算法^[2],它需要知道信道信息,本文提出的基于子空间的直接解码算法不需信道信息,可以直接从接收信号中得到码符信息的闭式解.在这一部分,我们对两算法的进行仿真实验.

空时码系统中,基站有两根发射天线,移动台有一个接收天线.对于相关解码器和基于子空间直接解码器,两算法的信道模型均为第 2 节中介绍的模型,每一根发射天线到接收天线之间的多径数为 3,多径延迟在 $(0, 0.25 T]$ 之间均匀分布,多径衰落服从零均值高斯分布,方差为 1,采用 QPSK 调制技

术.由于多径延迟在 $(0, 0.25 T]$ 之间均匀分布,根据第 2 节介绍的信道模型,采样区间位于 $(0.25 T, T]$,对每个码元周期中这一段采样两点,解码时,对于这一区间的信号进行处理.

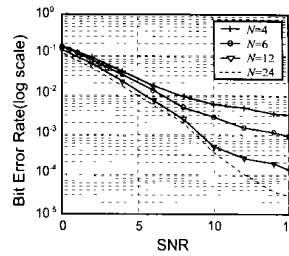


图 3 不同 N 下的子空间直接解码器性能比较

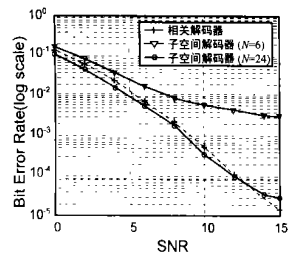


图 4 相关解码器与子空间直接解码器性能比较

式(4)中的 R 可以为连续 $4N (N=1, 2, \dots)$ 个码元周期中无码间串扰的部分组成的矩阵,对它进行 SVD 分解,得到噪声子空间,同样可以按照第 3 节所述,做适当变换,解得码符信息.噪声子空间是基于统计得到的,根据子空间的理论可知,随着 N 的增大,统计集合增大,噪声子空间的求解精确度提高,解码性能会逐渐提高.从图 3 中,可以看到这一点,随着 R 阵中连续码元个数的增加,解码的性能逐渐提高.但是,子空间精度的提高会造成运算量的增加,在实际中,性能和运算量折中考虑.

图 4 为基于子空间直接解码器和相关解码器性能比较图,从图中可以看到,当 $N=24$ 即 R 阵中连续码元为 $4 \times 24 = 96$ 个,信噪比较低时,直接解码算法的性能略优于相关解码器.这是因为,求子空间的过程实际上就是一个去噪的过程, R 阵中连续码元个数越多,子空间的求解精度越高,噪声滤除得越干净.而相关解码器针对去除加性噪声没有专门考虑,因而当信噪比较低时,直接解码算法有可能会优于相关解码器.

5 结论

空时分组码具有特殊的正交设计,正因为此,同其他的空时编码相比,它解码简单,并可提供较高的分集增益.本文将空时分组码这一特性和子空间方法相结合,实现了无需信道信息的解码.仿真结果表明,随着 R 阵中连续码元个数的增加,本文提出的直接解码算法的性能逐渐接近已知信道信息的解码算法.

本文以有两个发射天线的空时分组码为模型,提出了基于子空间的直接解码算法,它可以推广到发射天线更多的情况.

参考文献:

[1] 张平,陶小峰,王卫东.空时码[J].电子学报,2000,28(11A):110 - 113.
[2] Alamouti S M. A simple transmitter diversity scheme for wireless communications[J]. IEEE Journal on Selected. Areas in Communications, 1998,16(8):1451 - 1458.
[3] Tarokh V, Jafarkhani H, Calderbank R. A Space-time block codes from or thogonal designs[J]. IEEE Trans, 1999, IT-45(5): 1456 - 1467.

- [4] Tarokh V ,Jafarkhani H. A differential detection scheme for transmit diversity[J]. IEEE Journal on Selected. Areas in Communications ,2000 , 18(7) :1169 - 1174.
- [5] Hochwald B M ,Marzetta T L. Unitary space-time modulation for multiple antenna communications in Rayleigh flat fading[J]. IEEE Trans , 2000 ,IT-46(2) :543 - 564.
- [6] Proakis J G. Digital Communication [M]. New York :McGraw-Hill , 1989.
- [7] Li C ,Roy S. A subspace blind channel estimation method for OFDM systems without cyclic prefix[A]. Proc. of VTC2001 (Fall) [C]. Atlantic City :VTC,2001. 2148-2152.
- [8] Liu H ,Xu G. A subspace method for signature waveform estimation in synchronous CDMA systems [J]. IEEE Trans , 1996 , Commun. - 44 (10) :1346 - 1354.
- [9] 张贤达. 信号处理中的线性代数[M]. 北京 :科学出版社,1997.

作者简介:



赵 铮 女,1974 年出生于陕西西安,1996 年、1999 年分别获西安电子科技大学学士、硕士学位,现为西安交通大学通信与信息系博士研究生,主要研究方向为空时编码、阵列信号处理、多用户检测等,已在国内外发表论文十余篇。

附录:

定理 1 设 c_1, c_2, h_1^T 和 h_2^T 为维数相同的列

向量,如果空时分组码矩阵为 $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2^* & c_1^* \end{bmatrix}$, 有一个向量 $h = [h_1, h_2]^T$, 使得 $C^T h = 0$, 那么, 如果令 $H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix}$ 和 $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2^* \end{bmatrix}$, 它满足 $Hc = 0$.

证明:

$$\begin{bmatrix} c_1^T & -(c_2^T)^* \\ c_2^T & (c_1^T)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^T \\ h_2^T \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1^T h_1^T - (c_2^T)^* h_2^T \\ c_2^T h_1^T + (c_1^T)^* h_2^T \end{bmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{第2行取共轭}} \begin{bmatrix} c_1^T h_1^T - (c_2^T)^* h_2^T \\ (c_2^T)^T (h_1^*)^T + c_1^T (h_2^*)^T \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2^* \end{bmatrix} = 0$$

定理 2 设 c_1, c_2, h_1^T 和 h_2^T 为维数相同的列向量, 如果

$$H \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2^* \end{bmatrix} = 0, \text{ 其中 } H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix}, \text{ 则 } H \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1^* \end{bmatrix} = 0.$$

证明:

$$H \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2^* \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2^* \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \\ h_2^* & -h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2^* \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -h_2^* & h_1^* \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2^* \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -h_2^* & h_1^* \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} (-1) \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2^* \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -h_2^* & h_1^* \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_2^* \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

$$\left(H \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1^* \end{bmatrix} \right)^* = \begin{bmatrix} h_1 c_2 + h_2 c_1^* \\ h_2^* c_2 - h_1^* c_1^* \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} h_1^* c_2^* + h_2^* c_1 \\ h_2 c_2^* - h_1 c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_2^* & h_1^* \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_2^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

综合式(15)和式(16),得

$$H \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1^* \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

定理 3 已知 $k[c_1, -c_2^*]^T$ 为 $x^T D x = 0$ 中 x 的解, 其中 D 按照第 3 节所述构造, 求证 $k[c_1, -c_2^*]^T$ 为 $x^T D x = 0$ 中 x 的所有解。

证明: 利用反证法证明。假设存在一个向量 $x_2 = [x_{21}, x_{22}]^T$, 与 $[c_1, -c_2^*]^T$ 线性无关的, 是 $x^T D x = 0$ 中 x 的解, 则 $D[a_1[c_1, -c_2^*]^T + a_2 x_2]$ 为 $x^T y = 0$ 中 y 的解, 其中 a_1 和 a_2 为任意常数。

(1) 先证 $k_1[c_1 d_1^T, -c_2^* d_2^T]^T + k_2[c_2 d_2^T, c_1^* d_1^T]^T$ 为 $x^T y = 0$ 的所有解:

(a) 由定理 2 可以知道, $[c_1 d_1^T, -c_2^* d_2^T]^T$ 和 $[c_2 d_2^T, c_1^* d_1^T]^T$ 都为 $x^T y = 0$ 的解, $[c_1 d_1^T, -c_2^* d_2^T]^T$ 和 $[c_2 d_2^T, c_1^* d_1^T]^T$ 线性无关, 则 $x^T y = 0$ 中 y 的解空间基的个数大于等于 2。

(b) 的奇数行构成的矩阵等于 U_0^H , 由子空间的理论知, $rank(U_0) = 2$, 所以 $rank(\quad) = 2$, 因为 \quad 为一个 4×4 的矩阵, 根据线性方程理论, $x^T y = 0$ 中 y 的解空间基的个数小于等于 2。

综合以上两点, 可以知道 $x^T y = 0$ 中 y 的解空间基的个数为 2, 因为 $[c_1 d_1^T, -c_2^* d_2^T]^T$ 和 $[c_2 d_2^T, c_1^* d_1^T]^T$ 线性无关, 则 $k_1[c_1 d_1^T, -c_2^* d_2^T]^T + k_2[c_2 d_2^T, c_1^* d_1^T]^T$ 为 $x^T y = 0$ 的所有的解。

(2) 再证假设不成立, 因为 $D[a_1[c_1, -c_2^*]^T + a_2 x_2]$ 为 $x^T y = 0$ 中 y 的解, 则

$$a_1 D[c_1, -c_2^*]^T + a_2 D x_2 = k_1[c_1 d_1^T, -c_2^* d_2^T]^T + k_2[c_2 d_2^T, c_1^* d_1^T]^T \quad (17)$$

根据第 2、3 节定义的 d_1, d_2 和 D , 将式(17)展开, 得到

$$[(a_1 - k_1)c_1 + a_2 x_{21}, (a_1 - k_1)c_1 + a_2 x_{21}, -(a_1 - k_1)c_2^* + a_2 x_{22}, (a_1 - k_1)c_2^* - a_2 x_{22}] = k_2[c_2, -c_2, c_1^*, c_1^*]$$

因为 $c_2 \neq 0$, 由上式可得,

$$(a_1 - k_1)c_1 + a_2 x_{21} = -[(a_1 - k_1)c_1 + a_2 x_{21}] = 0 \quad (18)$$

显然, 上式不成立, 所以假设不成立, 得证。

在第 4 节中, 我们指出式(4)中的 R 可以为连续 $4N$ ($N = 1, 2, \dots$) 个码元周期组成的矩阵。本附录的证明针对 $N = 1$ 的情况, 它可以推广到 N 为任意整数的情况。